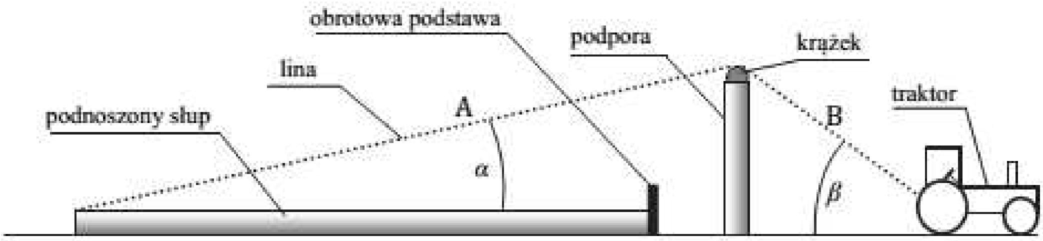
Dynamika ruchu obrotowego

Zauważyłem, że zadania dotyczące ruchu obrotowego bardzo często sprawiają maturzystom wiele kłopotów. A przecież wystarczy zrozumieć i stosować zasady dynamiki Newtona. Przeanalizujmy kilka przykładów zadań maturalnych dotyczących tego problemu.
Zadanie numer 3 z maja 2016 roku zostało opisane w pierwszej części serii artykułów dotyczących tej matury – polecam. W maju 2015 roku również zadanie 3 poświęcone było umiejętnościom dotyczącym bryły sztywnej.

Zadanie 3.

Słupy energetyczne linii przesyłowych wysokiego napięcia można składać z części na powierzchni ziemi, a następnie podnosić je do pozycji pionowej za pomocą liny, podpory z obrotowym krążkiem i na przykład traktora. Do wierzchołka leżącego słupa przyczepia się jeden z końców liny i przerzuca ją przez podporę, natomiast drugi koniec liny jest ciągnięty przez traktor. Drugi koniec słupa opiera się o zakotwiczoną w ziemi obrotową podstawę (rysunek poniżej). Zakładamy, że krążek na podporze obraca się bez tarcia.



Pierwsze dwa podpunkty tego zadania dotyczyły równowagi sił, dla naszych rozważań na temat dynamiki ruchu obrotowego interesujące będzie zadanie 3.3.

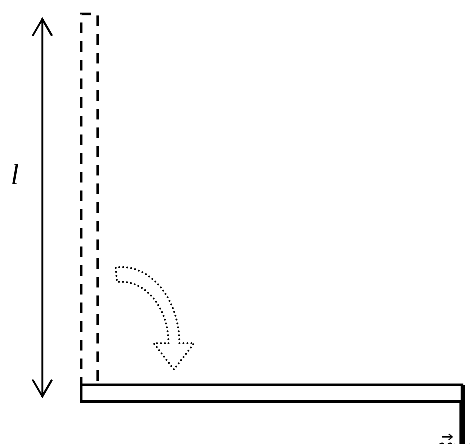
Zadanie 3.3. (0–3)

Słup o długości 12 m był podnoszony bardzo powoli. Gdy był on już w położeniu prawie pionowym, lina odczepiła się od niego. W wyniku tej awarii słup się przewrócił.

Oblicz wartość prędkości liniowej końca słupa w chwili uderzenia o powierzchnię ziemi.

Przyjmij, że słup można potraktować jako cienki jednorodny pręt. Moment bezwładności takiego pręta względem osi prostopadłej do niego i przechodzącej przez jego koniec jest równy $I = \frac{1}{3} m \cdot l^2$, gdzie m jest masą pręta, a l – jego długością.

Pionowo ustawiony słup ma energię potencjalną ciężkości. Do jej obliczenia używamy wzoru: $E_p = mgh$. Ale pamiętać należy o tym, że nie cały słup znajduje się na wysokości h. Jeden z końców znajduje się na wysokości równej jego długości, ale drugi koniec znajduje się na wysokości równej 0. Można powiedzieć, że wysokość, jaką należy podstawić do wzoru na energię poten-



cjalną ciężkości, jest równa $h = \frac{1}{2} l$. Skorzystajmy z zasady zachowania energii. W tym przypadku początkowa energia potencjalna stojącego słupa zamieni się w energię kinetyczną ruchu obrotowego przewracającego się słupa w momencie uderzenia o podłoże:

$$mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2} I\omega^2$$

gdzie: I – moment bezwładności słupa, ω – prędkość kątowa słupa w momencie uderzenia o podłoże.

Jeśli słup obraca się z prędkością kątową ω, to jego koniec ma prędkość liniową v równą $v = \omega \cdot l$. Równanie opisujące zasadę zachowania energii przyjmuje więc postać:

$$m \cdot g \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m \cdot l^2 \cdot \left(\frac{v}{l}\right)^2$$

Z powyższego równania można wyznaczyć wzór na wartość prędkości końca słupa w momencie uderzenia o podłoże:

$$v = \sqrt{3 \cdot g \cdot l}$$

Wstawienie danych do wzoru oraz obliczenie wartości prędkości kończy rozwiązanie tego zadania.

Podczas egzaminu maturalnego w maju 2013 roku zdarzyło się takie zadanie:

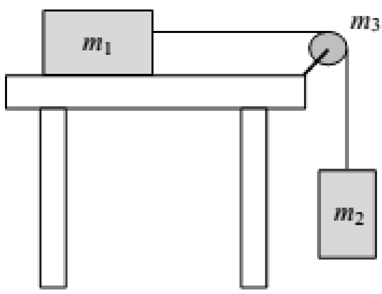
Zadanie 2. Dwie skrzynki i blok ***(9 pkt)***

Do krawędzi stołu przymocowany jest blok nieruchomy, będący jednorodnym krążkiem o masie m_3, obracającym się bez tarcia. Przez blok przełożona jest bardzo lekka i nierozciągliwa linka, której jeden koniec doczepiony jest do skrzynki o masie m_1, a drugi – do skrzynki o masie m_2. Pierwsza skrzynka leży na stole, a druga wisi na lince (rys. poniżej). Współczynnik tarcia pierwszej skrzynki o stół oznaczamy jako μ (bez rozróżnienia współczynników tarcia statycznego i kinetycznego). Moment bezwładności jednorodnego krążka (lub walca) względem jego osi wyraża się wzorem $I = \frac{1}{2} mR^2$, gdzie R jest promieniem krążka, a m – jego masą. W chwili początkowej obie skrzynki były nieruchome.

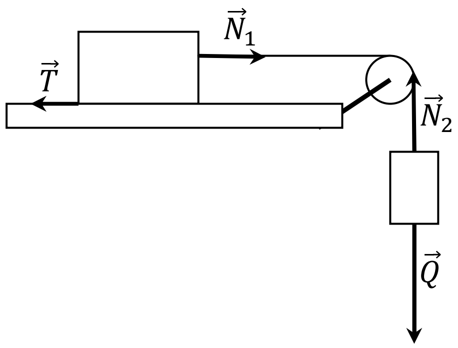
Zadanie 2.1 ***(2 pkt)***

Skrzynki zaczęły się poruszać. Dorysuj i opisz wektory sił działających na obydwie skrzynki wzdłuż ich kierunków ruchu.

Opis



Na wiszącą skrzynkę działają dwie siły: ciężar oraz siła pochodząca od linki. Skrzynka porusza się ruchem przyspieszonym, więc jej ciężar $\vec{Q}$ ma większą wartość niż naciąg linki $\vec{N}_2$. Na skrzynkę leżącą na stole działa siła tarcia $\vec{T}$ oraz siła pochodząca od linki i $\vec{N}_1$. Siła naciągu linki ma większą wartość niż tarcie (skrzynka porusza się ruchem przyspieszonym).



Zadanie 2.2 ***(3 pkt)***

Wykaż, że podczas ruchu skrzynek ich przyspieszenie można wyrazić wzorem

$$a = \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_3} \cdot g$$

Skorzystaj ze wzorów wyrażających II zasadę dynamiki dla bloku, pierwszej i drugiej skrzynki.

Zgodnie z sugestią zapisaną w tekście zadania skorzystamy z II zasady dynamiki. Przyjmiemy konwencję: *siła wypadkowa = masa · przyspieszenie* .

W przypadku krążka konwencja przyjmuje postać: *wypadkowy moment siły = moment bezwładności · przyspieszenie kątowe* .

Za pomocą równania: $(N_2 - N_1) \cdot R = I \cdot \varepsilon$.

Na krążek działają dwie siły pochodzące od liny. Jedna z nich „chce” go obrócić zgodnie z ruchem wskazówek zegara, a druga przeciwnie. Stąd siłą wypadkowa jest różnicą sił działających. Między przyspieszeniem kątowym ε krążka a przyspieszenie liniowym a liny jest zależność: $a = \varepsilon \cdot R$, gdzie R jest promieniem krążka. Uwzględniając ten fakt oraz wzór na wartość momentu bezwładności walca otrzymamy II zasadę dynamiki dla krążka:

$$(N_2 - N_1) \cdot R = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot R^2 \cdot \frac{a}{R} .$$

Po podzieleniu obu stron równania przez R otrzymamy:

$$(N_2 - N_1) = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot a .$$

II zasada dynamiki dla wiszącej skrzyni ma postać:

$$Q - N_2 = m_2 \cdot a$$

II zasada dynamiki dla skrzyni poruszające się na stole ma postać:

$$N_1 - T = m_1 \cdot a$$

Z równań opisujących ruch skrzynek wyznaczamy siły N_1 oraz N_2:

$$N_1 = m_1 \cdot a + T$$

$$N_2 = Q - m_2 \cdot a$$

i wstawiamy je do wzoru na opisującego ruch krążka:

$$Q - m_2 \cdot a - m_1 \cdot a - T = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot a \, .$$

Uwzględniamy fakt, że $Q = m_2 \cdot g$ oraz $T = \mu \cdot m_1 \cdot g$ i otrzymujemy:

$$m_2 \cdot g - m_2 \cdot a - m_1 \cdot a - \mu \cdot m_1 \cdot g = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot a \, .$$

Przekształcając powyższy wzór otrzymujemy:

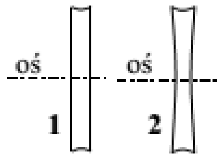
$$a = \frac{m_2 - \mu \cdot m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_3} g$$

Czyli otrzymaliśmy wyrażenie podane w treści zadania.

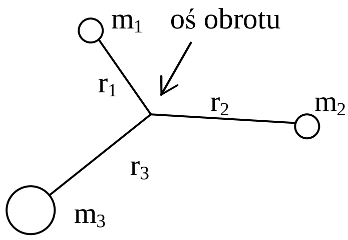
W następnym zadaniu musimy przedyskutować wpływ rozkładu masy na wartość momentu bezwładności bryły.

Zadanie 2.3 ***(1 pkt)***

Blok zastąpiono innym – o tej samej masie i promieniu, ale cieńszym bliżej osi, a grubszym na obrzeżu. Oba bloki są wykonane z jednorodnego materiału, a obok zostały przedstawione w przekroju. Określ, czy zastąpienie bloku 1 przez blok 2 spowodowało wzrost przyspieszenia układu, czy spadek, czy też przyspieszenie się nie zmieniło. Uzasadnij odpowiedź.



Zgodnie z najprostszą definicją moment bezwładności bryły jest sumą iloczynów mas oraz kwadratów ich odległości od osi obrotu. Więc w sytuacji przedstawionej na rysunku monet bezwładności bryły obliczymy ze wzoru:



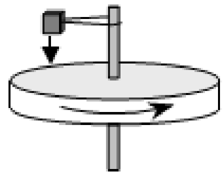
$$I = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2$$

Im dalej od osi obrotu znajduje się fragment bryły sztywnej, tym większy jest moment bezwładności tej bryły. W naszym przypadku blok 2 ma część masy umieszczoną dalej od osi obrotu niż blok 1. Tak więc moment bezwładności bloku 2 jest większy od momentu bezwładności bloku 1. Im większy jest moment bezwładności bloku, tym mniejsze jest przyspieszenie układu.

Z praw opisujących dynamikę ruchu obrotowego pozostała do omówienia zasada zachowania momentu pędu. Zadanie opisujące ten problem pojawiło się na maturze w roku 2012.

Zadanie 1. Krążek i ciężarek ***(12 pkt)***

Krążek o momencie bezwładności 0,01 kg·m^2 obracał się bez tarcia wokół swojej osi z prędkością kątową 32 rad/s. Na ten krążek spadł ciężarek o masie 0,6 kg, upuszczony bez prędkości początkowej. Ciężarek był połączony z osią krążka nitką ślizgającą się po osi bez tarcia. Po chwili ciężarek zaczął obracać się razem z krążkiem, pozostając w odległości 10 cm od osi obrotu. Rozmiary ciężarka można pominąć.



Zadanie 1.1 ***(3 pkt)***

Napisz nazwę zasady zachowania, która pozwala wyznaczyć wspólną prędkość kątową krążka i ciężarka. Oblicz wartość tej prędkości kątowej.

Skoro krążek obracał się bez tarcia, to można zastosować w tym przypadku zasadę zachowania pędu. Zasadę tę można sformułować następująco: *Gdy na układ ciał obracających się nie działają siły zewnętrzne, to moment pędu tego układu ciał nie ulega zmianie*.

Moment pędu układu przed upadkiem ciężarka:

$$L_1 = I_k \cdot \omega_1 + I_c \cdot 0$$

Moment pędu układu po upadku ciężarka:

$$L_2 = I_k \cdot \omega_2 + I_c \cdot \omega_2$$

Z zasady zachowania momentu pędu wynika, że $L_2 = L_1$, więc otrzymujemy:

$$I_k \cdot \omega_2 + I_c \cdot \omega_2 = I_k \cdot \omega_1$$

Prędkość kątowa układu po upadku ciężarka:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{I_k}{I_k + I_c}$$

Moment bezwładności ciężarka wynosi: $I_c = m_c \cdot r^2 = 0{,}6kg \cdot (0{,}1m)^2 = 0{,}006\ kg \cdot m^2$

Możemy już obliczyć wartość prędkości kątowej układu po upadku ciężarka:

$$\omega_2 = 32 \frac{rad}{s} \frac{0{,}01}{0{,}01 + 0{,}006} = 20 \frac{rad}{s}$$

Powtórzyliśmy w ten sposób umiejętności, które powinny wystarczyć do poradzenia sobie z zadaniami dotyczącymi dynamiki ruchu obrotowego. Zadania, które rozwiązaliśmy były typowymi zadaniami z tego działu podstawy programowej. Nie oznacza oczywiście, że nowe zadania będą bardzo podobne do powyższych. Mogą oczywiście różnić się znacząco w opowiedzianej historyjce. Ale prawa i zasady, które będziemy używać do ich rozwiązania będą takie same.

Grzegorz F. Wojewoda

nauczyciel fizyki