Jedna nierówność – wiele dowodów

Gdy przygotowujemy uczniów do matury z matematyki, dowodzimy nierówności różnego typu i wykorzystujemy oczywisty fakt, że **kwadrat liczby rzeczywistej jest zawsze liczbą nieujemną.** Weźmy układ nierówności prawdziwy dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c.

$$\begin{cases} (a-b)^2 \geq 0 \\ (b-c)^2 \geq 0 \\ (c-a)^2 \geq 0 \end{cases}$$

Gdy dodamy te trzy nierówności stronami i zastosujemy wzory skróconego mnożenia, otrzymamy nierówność $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0$,

którą możemy zapisać w postaci $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Zadanie

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c prawdziwa jest nierówność:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \ .$$

Na przykładzie powyższej nierówności przedstawię kilka metod, które można wykorzystać do dowodzenia nierówności.

1. Metoda grupowania

Powyższą nierówność możemy pomnożyć przez 2, zapisać w postaci

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0 \ ,$$

pogrupować w trzech nawiasach

$$\left(a^2 - 2ab + b^2\right) + \left(b^2 - 2bc + c^2\right) + \left(c^2 - 2ca + a^2\right) \geq 0 \ ,$$

zastosować wzory skróconego mnożenia i zapisać nierówność w postaci

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \ .$$

Oczywiście suma trzech kwadratów jest liczbą nieujemną.

2. Metoda postaci kanonicznej

Rozpatrzmy funkcje trzech zmiennych $f(a,b,c) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$.

Gdy zastosujemy wobec niej analogiczną metodę, jak podczas przekształcania postaci ogólnej funkcji kwadratowej do postaci kanonicznej, otrzymamy:

$$f(a,b,c) = a^2 - a(b+c) + b^2 - bc + c^2 = \left(a - \frac{b+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + b^2 - bc + c^2 =$$

$$= \left(a - \frac{b+c}{2}\right)^2 + \frac{3b^2 - 6bc + 3c^2}{4} = \left(a - \frac{b+c}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(b-c)^2 .$$

Powyższe wyrażenie jako suma dwóch kwadratów jest nieujemne.

Warto zauważyć, że $4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab - 4bc - 4ca = (2a - b - c)^2 + 3(b-c)^2$.

3. Metoda funkcja jednej zmiennej

Intersujące nas wyrażenie zapiszmy w postaci funkcji jednej zmiennej, np. zmiennej a:

$f(a) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = a^2 - (b+c)a + b^2 - bc + c^2$.

Zauważmy, że wyróżnik trójmianu kwadratowego jest liczbą niedodatnią

$\Delta = (b+c)^2 - 4(b^2 - bc + c^2) = -3b^2 + 6bc - 3c^2 = -3(b-c)^2 \le 0$,

zatem wyrażenie $a^2 - (b+c)a + b^2 - bc + c^2$ jest zawsze nieujemne.

4. Metoda wykorzystująca jednorodność wielomianu

Gdy zmienne a, b, c są jednocześnie zerem, nierówność jest oczywista. Załóżmy, że $c \ne 0$.

Podzielmy nierówność przez $c^2 \ne 0$, a po podstawieniu $x = a/c$ oraz $y = b/c$ nasza nierówność będzie miała postać $x^2 + y^2 + 1 \ge xy + x + y$.

Do uzasadnienia tej prostszej nierówności można wykorzystać metody opisane powyżej.

5. Metoda „mniej zmiennych”

Bez straty ogólności możemy założyć, że $a \le b \le c$. Niech $b = a + s$, $c = a + t$, gdzie $t \ge s \ge 0$.

Wtedy naszą nierówność $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$ możemy zapisać tak:

$$a^2 + (a+s)^2 + (a+t)^2 \ge a(a+s) + (a+s)(a+t) + a(a+t)$$

$$a^2 + a^2 + 2as + s^2 + a^2 + 2at + t^2 \ge a^2 + as + a^2 + as + at + st + a^2 + at$$

$$s^2 + t^2 \ge st .$$

Ostatnia nierówność zawiera tylko dwie zmienne i można ją uzasadnić na wiele sposobów.

6. Nierówność Cauchego – Buniakowskiego – Schwarza (C-B-S)

Nierówność **C-B-S** ma postać $\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{w}\right| \geq \vec{u} \circ \vec{w}$,

i dotyczy iloczynu skalarnego wektorów $\vec{u} \circ \vec{w} = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{w}\right| \cdot \cos\varphi$.

Weźmy dwa wektory różniące się kolejnością liczb na odpowiednich współrzędnych.

Niech $\vec{u} = [a, b, c]$, $\vec{w} = [b, c, a]$. Wtedy $\left|\vec{u}\right| = \left|\vec{w}\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ oraz $\vec{u} \circ \vec{w} = ab + bc + ca$.

Na podstawie nierówności **C-B-S** dostajemy $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Ćwiczenie

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c prawdziwa jest nierówność:

$$a^2 + 4b^2 + 9c^2 \geq 2ab + 6bc + 3ca.$$

Kolejne metody to już typowe metody akademickie, które pozwalają uzasadniać bardziej ogólne typy nierówności.

7. Kryterium Sylwestra dla form dwukwadratowych

Zbadajmy formę określoną wzorem $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1$,

której odpowiada macierz: $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$.

Wyznaczniki macierzy

$$\det[1] = 1 \geq 0, \qquad \det\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{4} \geq 0 \qquad \det\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = 0 \geq 0$$

są dodatnie, zatem forma jest dodatnio półokreślona i przyjmuje tylko wartości nieujemne.

8. Pochodna funkcji trzech zmiennych

Rozpatrzmy funkcje trzech zmiennych $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$

i obliczmy dla niej pochodne względem kolejnych zmiennych:

$f_x(x, y, z) = 2x - y - z$, $f_y(x, y, z) = 2y - x - z$, $f_z(x, y, z) = 2z - x - y$.

Otrzymujemy: $f_x = f_y = f_z = 0 \Leftrightarrow x = y = z$.

Możemy skonstruować hesjan

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

i obliczyć stosowne wyznaczniki:

$$det[2] = 2 \geq 0, \qquad det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3 \geq 0 \qquad det\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 0 \geq 0.$$

Ponieważ $f(0,0,0)=0$, zatem funkcja $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ przyjmuje wartości nieujemne.

9. Nierówność Muirheada

Twierdzenie Muirheada dotyczy wielomianów symetrycznych o zmiennych nieujemnych, i nierówności typu:

$a^6+b^6 \geq a^5b+ab^5 \geq a^4b^2+a^2b^4 \geq a^3b^3+a^3b^3$

$a^3+b^3+c^3 \geq a^2b+bc^2+ac^2 \geq abc+abc+abc$ czyli $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$

$a^4+b^4+c^4 \geq a^3b+b^3c+ac^3 \geq a^2bc+ab^2c+abc^2$.

Szczegóły twierdzenia wykraczają poza ten artykuł, ale na ich podstawie nierówność

$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ jest oczywista.

10. Metoda uporządkowanych ciągów

Mamy trzy oceny: dwójkę (2), trójkę (3) oraz piątkę (5) i prosimy ucznia, by przyporządkował im wagi: 1, 2, 4 (każdej ocenie inną wagę) tak, aby średnia ważona tych ocen była jak najwyższa. Dla ucznia oczywistym jest, że najlepszej ocenie należy przyporządkować największą wagę, tzn.: 5 przyporządkować wagę 4, 3 wagę 2, a 2 wagę 1. Żadne inne przyporządkowanie nie jest bardziej korzystne.

Zatem jeśli $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ oraz $y_1 \leq y_2 \leq y_3$, to prawdziwa jest nierówność:

$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 \geq x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1$.

Jeśli przyjmiemy, że: $x_1=y_1=a$, $x_2=y_2=b$, $x_3=y_3=c$ oraz, bez utraty ogólności, że $a \leq b \leq c$,

to otrzymujemy $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$.