

Popularne błędy uczniów na egzaminie maturalnym z matematyki

Zarówno na lekcjach matematyki, jak i na maturze uczniowie popełniają błędy rachunkowe i mechaniczne wynikające z nieuwagi, a także z braku znajomości zasadniczych pojęć, twierdzeń czy algorytmów. Artykuł nie klasyfikuje błędów dotyczących arytmetyki, algebry i prostych elementów analizy, a jedynie podaje przykłady niepoprawnie stosowanych praw matematycznych dotyczących:

- działań arytmetycznych,
- procentów,
- pierwiastków, potęg i logarytmów,
- wzorów skróconego mnożenia,
- działań algebraicznych,
- równań i nierówności,
- funkcji kwadratowych,
- ciągów liczbowych,
- funkcji wymiernych, wykładniczych, logarytmicznych i trygonometrycznych.

Oddzielnego potraktowania wymagałyby inne działy matematyki takie, jak: geometria, geometria analityczna, stereometria, rachunek prawdopodobieństwa czy złożone elementy analizy matematycznej.

Wymienione poniżej błędy popełniają zwykle uczniowie mający kłopoty z matematyką, ale niektóre z nich zdarzają się, także uczniom uczęszczającym do klas z rozszerzoną matematyką. Poniższą listę błędów wraz ze stosownym komentarzem warto przedstawić maturzystom, gdyż informacje te mogą im się przydać do szybkiej eliminacji fałszywych dystraktorów występujących w zadaniach zamkniętych oraz do zachowania większej czujności podczas rozwiązywania zadań otwartych.

Oto 100 przykładów błędów pojawiających się najczęściej:

1. Liczba $2 + 2 \cdot 2 = 6$, a nie 8.
2. Liczba $6 - 2 \cdot 2 = 2$, a nie 8.
3. Liczba $6 + 2 \div 2 = 7$, a nie 4.
4. Liczba $3 - 3 \div 3 = 2$, a nie 0.
5. Liczba $10 - 5 + 2 = 7$, a nie 3.
6. Liczba $10 - 5 - 2 = 3$, a nie 7.
7. Liczba $-5^2 = -25$, a nie 25.
8. Jeśli liczba a jest o 25% większa od liczby b , to liczba b jest o 20% mniejsza od liczby a (dlaczego?), a nie o 25%.
9. Jeśli cena towaru wzrośnie dwukrotnie o 20%, to cena towaru wzrośnie o 44% (dlaczego?), a nie o 40%.
10. Inflacja wzrastając z 20% do 30%, wzrasta o 50% (dlaczego?), a nie o 10%.
11. Cena towaru wzrosła o 400% oznacza to, że wzrosła ona 5-krotnie, a nie 4-krotnie.
12. Cena towaru zmalała o 90% oznacza to, że cena zmalała 10-krotnie, a nie 9-krotnie.
13. Kwadratem wyrażenia $3a^5$ jest $9a^{10}$, a nie $3a^{10}$, ani nie $9a^{25}$, ani nie $3a^{25}$.
14. Sześcianem wyrażenia $2a^4$ jest $8a^{12}$, a nie $2a^{12}$, ani nie $8a^{64}$, ani nie $2a^{64}$.

15. Liczba $(2\sqrt{3})^2 = 12$, a nie $4\sqrt{3}$, ani nie 6.
16. Liczba $\sqrt{33^2 + 44^2} = 55$, a nie 77.
17. Liczba $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$, a nie 1.
18. Liczba $\sqrt{64 + 36} = 10$, a nie $8 + 6 = 14$.
19. Liczba $\sqrt{25 - 9} = 4$, a nie $5 - 3 = 2$.
20. Liczba $\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{3}$, a nie 3.
21. Liczba $123000 = 1,23 \cdot 10^5$, a nie $1,23 \cdot 10^3$.
22. Liczba $1,23 \cdot 10^{-3} = 0,00123$, a nie 0,123; ani nie 0,000123.
23. Liczba $3 \cdot 3^{20} = 3^{21}$, a nie 9^{20} .
24. Połowa liczby 2^{20} to 2^{19} , a nie 2^{10} .
25. Liczba $3^{100} + 3^{100} + 3^{100} = 3^{101}$, a nie 3^{300} .
26. Liczba 3^{-1} jest równa $\frac{1}{3}$, a nie $\sqrt{3}$.
27. Liczba $3^{\frac{1}{2}}$ jest równa $\sqrt{3}$, a nie $\frac{1}{3}$.
28. Liczba $\frac{5^2}{5^{-4}} = 5^6$, a nie 5^{-2} .
29. Liczba $\log 6 + \log 2 = \log 12$, a nie $\log 8$.
30. Liczba $\log 6 - \log 2 = \log 3$, a nie $\log 4$.
31. Liczba $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$, a nie -1 .
32. Liczba $\log_2 \frac{1}{2} = -1$, a nie $\sqrt{2}$.
33. Liczba $\frac{\log 8}{\log 2} = 3$, a nie $\log 6$.
34. Liczba $\log_2 4 \cdot \log_2 8 = 6$ (dlaczego?), a nie $\log_2(4 \cdot 8)$.
35. Liczba $(3 + \sqrt{2})^2 = 11 + 6\sqrt{2}$, a nie 11.
36. Wyrażenie $(x - 3)^2$ jest równe $x^2 - 6x + 9$, a nie $x^2 + 9$.
37. Wyrażenie $(x + 3)^2$ jest równe $x^2 + 6x + 9$, a nie $x^2 + 9$.
38. Wyrażenie $(x - 3)(x + 3)$ jest równe $x^2 - 9$, a nie $x^2 + 9$.
39. Wyrażenie $(-a - b)^2$ jest równe $a^2 + 2ab + b^2$, a nie $a^2 - 2ab + b^2$.
40. Wyrażenie $(-a + b)^2$ jest równe $a^2 - 2ab + b^2$, a nie $a^2 + 2ab + b^2$.
41. Liczba $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2$, a nie $2 - \sqrt{5}$.
42. Liczbą odwrotną do liczby $\sqrt{2} - 1$ jest $\sqrt{2} + 1$ (dlaczego?), a nie liczba $1 - \sqrt{2}$.
43. Liczbą przeciwną do liczby $1 - \sqrt{2}$ jest $\sqrt{2} - 1$ (dlaczego?), a nie liczba $1 + \sqrt{2}$.
44. Liczba $\frac{2+2\sqrt{10}}{2}$ jest równa $1 + \sqrt{10}$, a nie: $1 + 2\sqrt{10}$ czy $2 + \sqrt{10}$.

45. Dla $a \neq b$ wyrażenie $\frac{a-b}{b-a}$ jest równe -1 (dlaczego?), a nie 1 .
46. Dla $b \neq 0$ wyrażenie $\frac{ab+b}{b}$ jest równe $a + 1$, a nie jest równe $ab + 1$ ani $a + b$.
47. Dla $xy \neq 0$ wyrażenie $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$, a nie $\frac{2}{x+y}$.
48. Wyrażenie $x - (x + 1)$ jest równe -1 , a nie 1 .
49. Wyrażenie $x - (x - 1)$ jest równe 1 , a nie -1 .
50. Wyrażenie $3x - 2(x + 1)$ jest równe $x - 2$, a nie $x + 2$, ani nie $x + 1$, ani nie $x - 1$.
51. Wyrażenie $x^2 - (x + 1)^2$ jest równe $-2x - 1$, a nie $2x + 1$.
52. Wyrażenie $x^2 - (x - 1)^2$ jest równe $2x - 1$, a nie -1 .
53. Jeśli $m > n > 0$, to $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$ (dlaczego?), a nie $\frac{1}{m} > \frac{1}{n}$.
54. Z nierówności $0,3^m < 0,3^n$ wynika, że $m > n$ (dlaczego?), a nie, że $m < n$.
55. Jeśli $m > n > 0$, to $\log_{0,5} m < \log_{0,5} n$ (dlaczego?), a nie $\log_{0,5} m > \log_{0,5} n$.
56. Liczba $\log_{0,4} 0,2$ jest dodatnia, a nie ujemna.
57. Liczba $\log_{0,5} 5$ jest ujemna, a nie dodatnia.
58. Mimo że $20^\circ > 18^\circ$, to $\cos 20^\circ < \cos 18^\circ$, a nie $\cos 20^\circ > \cos 18^\circ$.
59. Mimo że $120^\circ > 118^\circ$, to $\sin 120^\circ < \sin 18^\circ$, a nie $\sin 120^\circ > \sin 118^\circ$.
60. Do przedziału $\langle 2; 5 \rangle$ należy nieskończenie wiele liczb, a nie tylko liczby $2, 3, 4, 5$.
61. Do przedziału $(10; 20)$ należy 9 liczb całkowitych, a nie 10.
62. Zbiór liczb $\{20, 21, 22, \dots, 29, 30\}$ ma 11 elementów, a nie 10 elementów.
63. Do zbioru $\{20, 21, 22, \dots, 29, 30\}$ należy dokładnie 6 liczb parzystych, a nie tylko 5.
64. Liczb naturalnych trzycyfrowych jest 900, a nie 899.
65. Medianą wszystkich liczb naturalnych od 1 do 20 jest liczba $10\frac{1}{2}$, a nie liczba 10.
66. Różnicą ciągu arytmetycznego $(11, 7, 3)$ jest $r = -4$, a nie $r = 4$.
67. Liczby $(2, x, 8)$ tworzą ciąg geometryczny dla $x = 4$ lub $x = -4$, a nie tylko dla $x = 4$.
68. Suma $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1)$ nie ma dokładnie $n + 1$ składników, a nie n .
69. Jeśli wzór ogólny ciągu ma postać $a_n = 4n + 1$, to $a_{n+1} = 4n + 5$, a nie $a_{n+1} = 4n + 2$.
70. Liczby $2, 4, 8$ tworzą ciąg geometryczny, a nie ciąg arytmetyczny.
71. Liczby $2, 4, 6$ tworzą ciąg arytmetyczny, a nie ciąg geometryczny.
72. Liczby $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1)$ tworzą ciąg arytmetyczny (o jakiej różnicy?), a nie ciąg geometryczny.
73. Liczby $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1)$ tworzą ciąg geometryczny (o jakim ilorazie?), a nie ciąg arytmetyczny.
74. Nie każdy ciąg musi być ciągiem geometrycznym lub ciągiem arytmetycznym.
75. Rozwiązaniem równania $4 = 6x$ jest liczba $x = \frac{2}{3}$, a nie liczba $x = \frac{3}{2}$.
76. Rozwiązaniem nierówności $-5x < 10$ jest $x > -2$ (dlaczego?), a nie $x < -2$.

77. Nierówność $\frac{37}{71} < \frac{x}{13}$ jest równoważna nierówności $37 \cdot 13 < 71x$, a nie $71x < 37 \cdot 13$.
78. Rozwiązaniem nierówności $5 < \frac{10}{x}$ jest przedział $(0, 2)$ (dlaczego?), a nie $x < 2$.
79. Rozwiązaniem równania $x^3 + 4 = 0$ jest $x = -\sqrt[3]{4}$, a nie $x \in \emptyset$.
80. Rozwiązaniem równania $\frac{x-2}{4-2x} = 0$ jest zbiór \emptyset , a nie liczba $x = 2$.
81. Rozwiązaniami równania $(x + 2)(x - 3) = 0$ są liczby $x = -2$ oraz $x = 3$, a nie liczby $2, -3$.
82. Równania $x^2 + 2 = 0$ nie spełnia żadna liczba rzeczywista, a nie np. liczba $-\sqrt{2}$.
83. Wierzchołkiem paraboli $y = (x + 2)^2 + 5$ jest punkt $W = (-2, 5)$, a nie $W = (2, 5)$.
84. Rozwiązaniem nierówności $x^2 < 2x$ jest zbiór $(0, 2)$, a nie $x < 2$.
85. Rozwiązaniem nierówności $x^2 < 4$ jest zbiór $(-2, 2)$, a nie $x < 2$.
86. Rozwiązaniem nierówności $|x| < 2$ jest zbiór $(-2, 2)$, a nie $x < 2$.
87. Rozwiązaniem nierówności $x^2 - 2x + 5 > 0$ jest zbiór \mathbb{R} (dlaczego?), a nie zbiór \emptyset .
88. Rozwiązaniem nierówności $x^2 - 4x + 4 > 0$ jest zbiór $\mathbb{R} - \{2\}$ (dlaczego?), a nie liczba $x = 2$.
89. Rozwiązaniem nierówności $x^2 - 4x + 3 < 0$ jest przedział $(1, 3)$, a nie liczby $x_1 = 1, x_2 = 3$.
90. Z warunku $a^2 = b^2$ wynika, że $a = b$ lub $a = -b$, a nie tylko, że $a = b$.
91. Z warunku $a^2 < b^2$ wynika, że $|a| < |b|$, a nie wynika, że $a < b$.
92. Równanie $2^x = -4$ nie ma rozwiązania, rozwiązaniem nie jest liczba $x = -2$.
93. Zbiorem wartości funkcji $f(x) = x^2$ jest zbiór liczb nieujemnych, a nie zbiór liczb dodatnich.
94. Dziedzina funkcji $f(x) = \log x$ jest zbiór liczb dodatnich, a nie zbiór liczb nieujemnych.
95. Dziedzina funkcji $f(x) = \frac{x}{x-2}$ jest zbiór $\mathbb{R} - \{2\}$, a nie zbiór liczb rzeczywistych różnych od 0.
96. Jeśli przesuwamy wykres funkcji $y = f(x)$ o trzy jednostki w prawo, otrzymujemy wykres funkcji $y = f(x - 3)$, a nie $y = f(x + 3)$.
97. Jeśli przesuwamy wykres funkcji $y = f(x)$ o trzy jednostki w lewo, otrzymujemy wykres funkcji $y = f(x + 3)$, a nie $y = f(x - 3)$.
98. Wyrażenie $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$, a nie równa się 1.
99. Dla $\sin \alpha \neq 0$ wyrażenie $\frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha} = \cos \alpha$ (dlaczego?), a nie równa się 1.
100. Z faktu $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nie wynika, że $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$.